解　答　例

受験番号					

（ 数 学 ）

総得点欄

問題1

(1) $f'(x) = 2x + 2A$であるから，$f(x)$の$x=1$における接線の傾きは$f'(1) = 2+2A$である。よって，$f'(1) > 0$となる条件は$A > -1$であるから，その確率は$\dfrac{4}{7}$である。//

(2) $f(x) = (x+A)^2 - A^2 + B$より，$f(x)$の頂点のy座標は$-A^2+B$である。$-A^2+B > 0$となるAとBの組み合わせは

- $A = 0$かつ$B = 1,\ 2,\ 3;$
- $A = \pm 1$かつ$B = 2,\ 3$

である。よって，求める確率は，

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$$

である。//

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}+Ax^2+Bx\right]_0^1 = \frac{1}{3}+A+B$である。よって，$A < \displaystyle\int_0^1 f(x)dx < 0$となる条件は$A < \dfrac{1}{3}+A+B < 0$, 即ち，$B > -\dfrac{1}{3}$かつ$A < -B-\dfrac{1}{3}$である。条件をみたす$A$と$B$の組み合わせは

- $B = 0$かつ$A = -3,\ -2,\ -1;$
- $B = 1$かつ$A = -3,\ -2;$
- $B = 2$かつ$A = -3$

である。よって，求める確率は

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{3+2+1}{7}=\frac{6}{49}$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	

解答例　| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|

（数学）

問題2

(1) $s^2\log s=0$ かつ $s>0$ であるから $\log s=0$ である。よって $s=1$ である。//

(2) $f'(x)=2x\log x+x=x(2\log x+1)=0$, $x>0$ を解くと $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ である。ここから，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$1/\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	\	$-$	0	$+$
$f(x)$	\	$\searrow$	$-1/(2e)$	$\nearrow$

増減表より，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値をとる。ゆえに，$t=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ である。//

(3) (1), (2) より，$f(x)\leqq 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\leqq x\leqq 1\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}
S=\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}(-x^2\log x)dx &= \left[-\frac{x^3}{3}\log x\right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{1}{6e\sqrt{e}}+\left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} \\
&= -\frac{1}{6e\sqrt{e}}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9e\sqrt{e}} \\
&= \frac{1}{9}-\frac{5}{18e\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	

解　答　例　　受験番号

（ 数学 ）

問題3

(1) OBとACがそれぞれの中点で交わるので，$\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{\alpha^3+\alpha}{2}$，即ち，$\alpha^3-\alpha^2+\alpha=0$ である。これを解くと，$\alpha=0,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。条件より α の実部および虚部は正であるから，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ である。//

(2) 前問より，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ である。ド・モアブルの定理より，$\alpha^3=\cos\pi+i\sin\pi$ である。ゆえに，α の偏角は $\dfrac{\pi}{3}$, α^3 の偏角は π であるから，$\angle\mathrm{AOC}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ である。//

(3) $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表す。ド・モアブルの定理より，$\alpha^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ であるから，α の偏角は θ, α^2 の偏角は 2θ である。よって，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta-\theta=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。ゆえに，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となる。$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ のときは，$\sqrt{2}r=r^2$ であるから，$r=\sqrt{2}$ である。よって，$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=1+i$ である。$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$ のときは，$r=\sqrt{2}r^2$ であるから，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。ゆえに，$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+i}{2}$ である。以上により，$\alpha=1+i,\ \dfrac{1+i}{2}$ である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	

問題4

(1) $\{f(x)\}^2 = \dfrac{4-x^2}{4}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
V = \pi \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{4-x^2}{4}\right) dx &= \frac{\pi}{4}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{27}\right) \\
&= \frac{16\sqrt{3}}{27}\pi
\end{aligned}
$$

である。//

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x) = -\dfrac{x}{2\sqrt{4-x^2}}$ である。//

(3) 前問より

$$
f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4(4-x^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{3x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{16-3x^2}
$$

であるから，(与式) $= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \sqrt{16-3x^2}dx$ である。ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x = \sin\theta$ とおくと，置換積分公式および2倍角の公式により，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	