

問題 1

(1) 固有方程式 $|A - \lambda E| = (\lambda - 2)^2 = 0$ を解くと $\lambda = 2$ であるから、 A の固有値は 2 である。固有値 2 に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は、連立方程式 $(A - 2E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($C \neq 0$) となる。

(2) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ である。よって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B \text{ である。} //$$

(3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから $n = 1$ のとき等号は成立する。 $n = k$ のとき等号が成り立つ、即ち、 $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= BB^k \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。以上により、任意の自然数 n に対して等号は成立する。 //

(4) (2) より $A = PBP^{-1}$ であるから、(3) より、

$$A^n = P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-n)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$$

である。 //

採点欄		採点欄		採点欄		採点欄		得点欄	
(1)		(2)		(3)		(4)			

(数学・応用数学)

問題2

(1) 1回目に取り出した球が赤球である確率は $\frac{2}{n}$ である。//

(2) 2回目に取り出した球が赤球である確率は、

- 1回目に取り出した球が赤球で、残りの $n-1$ 個の球に赤球が1個ある状態で2回目に赤球を取る確率、
- 1回目に取り出した球が白球で、残りの $n-1$ 個の球に赤球が2個ある状態で2回目に赤球を取る確率、

の和である。よって

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2}{n}$$

である。//

(3) (2)と同様に3回目に取り出した球が赤球である確率を求めると、

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} = \frac{2}{n}$$

である。1回目と3回目に取り出した球がともに赤球である確率は

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{2}{n(n-1)}$$

である。よって求める条件付き確率は、

$$\frac{2}{n(n-1)} \div \frac{2}{n} = \frac{1}{n-1}$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	
------------	--	------------	--	------------	--	-----	--

(数学・応用数学)

問題3

(1) 合成関数および逆関数の微分公式より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{ds}} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{e^s} = \frac{dy}{ds} \cdot e^{-s}$$

となり, 等式が示された。//

(2) (1) より,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \cdot e^{-s} \right) \cdot \frac{ds}{dx} = \left(\frac{d^2y}{ds^2} \cdot e^{-s} - \frac{dy}{ds} \cdot e^{-s} \right) \cdot e^{-s} = \left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right) \cdot e^{-2s}$$

となり, 等式が示された。//

(3) (1), (2) の等式および $x = e^s$ を微分方程式 (*) に代入すると,

$$e^{2s} \left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right) \cdot e^{-2s} + e^s \cdot \frac{dy}{ds} \cdot e^{-s} - 4y = 0,$$

即ち, $\frac{d^2y}{ds^2} - 4y = 0$ である。特性方程式 $\lambda^2 - 4 = 0$ を解くと $\lambda = 2, -2$ であるから,

$y = C_1 e^{-2s} + C_2 e^{2s} = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^2$ (C_1, C_2 は任意定数) となる。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	
------------	--	------------	--	------------	--	-----	--

(数学・応用数学)

問題4

(1) $f(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 1$ である。 //

(2) ロピタルの定理より,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}e^x} = 0$$

である。 //

(3) (2) および部分積分より,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \left[-x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となり, 等式が示された。 //

(4) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ を $u = \sqrt{x}$ として置換積分すると,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

となる。よって, (3) より, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる。 //

採点欄		採点欄		採点欄		採点欄	
(1)		(2)		(3)		(4)	

得点欄	
-----	--