

専 門 科 目

# 数学・応用数学

## 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
- 2 問題用紙は1ページで、解答用紙は4ページあります。試験開始の合図があったから確かめなさい。
- 3 監督者の指示に従い、解答用紙の各ページに受験番号を記入しなさい。氏名を書いてはいけません。
- 4 文字などの印刷に不鮮明なところがあった場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 5 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。ただし、「総得点欄」「採点欄」「得点欄」に記入してはいけません。また、裏面を使用してはいけません。
- 6 問題用紙の余白は下書きとして利用してかまいません。
- 7 試験終了後、配付された問題用紙、下書用紙は持ち帰りなさい。

# 問題用紙

## ( 数学・応用数学 )

問題1 行列  $A, B, P$  を  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  とする。また、 $n$  を任意の自然数とする。次の問いに答えなさい。

- (1)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
- (2)  $B = P^{-1}AP$  が成り立つことを示しなさい。
- (3)  $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$  が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示しなさい。
- (4)  $A^n$  を、 $n$  を用いて表しなさい。

問題2  $n$  を4以上の自然数とする。 $n - 2$  個の白球と2個の赤球の合計  $n$  個の球が入っている箱から、取り出した球を箱の中に戻さない方法で1個ずつ無作為に球を3回取り出す。次の問いに答えなさい。

- (1) 1回目に取り出した球が赤球である確率を求めなさい。
- (2) 2回目に取り出した球が赤球である確率を求めなさい。
- (3) 3回目に取り出した球が赤球であった。このとき、1回目に取り出した球が赤球である条件付き確率を求めなさい。

問題3  $x > 0$  の範囲で定義された実数値関数  $y = y(x)$  に関する微分方程式を

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad \dots (*)$$

とし、 $x = e^s$  とする。次の問いに答えなさい。

- (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot e^{-s}$  が成り立つことを示しなさい。
- (2)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left( \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right) e^{-2s}$  が成り立つことを示しなさい。
- (3) 微分方程式(\*)を、 $s$  についての微分方程式に変換することにより解きなさい。

問題4 実数  $t > 0$  に対して、 $f(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$  とする。次の問いに答えなさい。

- (1)  $f(1)$  の値を求めなさい。
- (2) 極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x}$  の値を求めなさい。
- (3) 部分積分を用いて、 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)$  が成り立つことを示しなさい。
- (4) 前問(3)および  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を用いて、 $f\left(\frac{3}{2}\right)$  の値を求めなさい。