解 答 例

受験番号					

（ 数学・応用数学 ）

総得点欄

問題1 (配点 50 点)

(1) 固有方程式 $|A-\lambda E|=(\lambda-2)^2=0$ を解くと $\lambda=2$ であるから，A の固有値は 2 である。固有値 2 に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は，連立方程式 $(A-2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(C\neq 0)$ となる。

(2) $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ である。よって，

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=B$ である。//

(3) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから $n=1$ のとき等号は成立する。$n=k$ のとき等号が成り立つ，即ち，$B^k=\begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ と仮定すると，

$$
\begin{aligned}
B^{k+1} &= BB^k \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。以上により，任意の自然数 n に対して等号は成立する。//

(4) (2) より $A=PBP^{-1}$ であるから，(3) より，

$$
A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-n)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}
$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		採点欄 (4)		得点欄	

（ 数 学・応 用 数 学 ）

問題 2 (配点 50 点)

(1) 1回目に取り出した球が赤球である確率は $\frac{2}{n}$ である。//

(2) 2回目に取り出した球が赤球である確率は，

- 1回目に取り出した球が赤球で，残りの $n-1$ 個の球に赤球が1個ある状態で2回目に赤球を取る確率，
- 1回目に取り出した球が白球で，残りの $n-1$ 個の球に赤球が2個ある状態で2回目に赤球を取る確率，

の和である。よって

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}=\frac{2}{n}$$

である。//

(3) (2) と同様に3回目に取り出した球が赤球である確率を求めると，

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}+\frac{n-2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}+\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}=\frac{2}{n}$$

である。1回目と3回目に取り出した球がともに赤球である確率は

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{2}{n(n-1)}$$

である。よって求める条件付き確率は，

$$\frac{2}{n(n-1)}\div\frac{2}{n}=\frac{1}{n-1}$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	

解答例　受験番号 | | | | | |

（ 数学・応用数学 ）

問題3 (配点 50 点)

(1) 合成関数および逆関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{ds}}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{1}{e^s}=\frac{dy}{ds}\cdot e^{-s}$$

となり，等式が示された。//

(2) (1) より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cdot e^{-s}\right)\cdot\frac{ds}{dx}=\left(\frac{d^2y}{ds^2}\cdot e^{-s}-\frac{dy}{ds}\cdot e^{-s}\right)\cdot e^{-s}=\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)\cdot e^{-2s}$$

となり，等式が示された。//

(3) (1), (2) の等式および $x=e^s$ を微分方程式 (*) に代入すると，

$$e^{2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)\cdot e^{-2s}+e^s\cdot\frac{dy}{ds}\cdot e^{-s}-4y=0,$$

即ち，$\dfrac{d^2y}{ds^2}-4y=0$ である。特性方程式 $\lambda^2-4=0$ を解くと $\lambda=2,-2$ であるから，
$y=C_1e^{-2s}+C_2e^{2s}=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2x^2$ (C_1, C_2 は任意定数) となる。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	

解　答　例　受験番号

（　数学・応用数学　）

問題 4 (配点 50 点)

(1) $f(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \Big[-e^{-x} \Big]_0^\infty = 1$ である。//

(2) ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}} e^x} = 0$$

である。//

(3) (2) および部分積分より，

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \Big[-x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \Big]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となり，等式が示された。//

(4) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ を $u = \sqrt{x}$ として置換積分すると，

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

となる。よって，(3) より，$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		採点欄 (4)		得点欄	