令和７年度　第３学年入学者選抜学力試験問題

専　門　科　目

数学・応用数学

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開いてはいけません。

2　問題用紙は２ページで，解答用紙は４ページあります。試験開始の合図があってから確かめなさい。

3　監督者の指示に従い，解答用紙の各ページに受験番号を記入しなさい。氏名を書いてはいけません。

4　文字などの印刷に不鮮明なところがあった場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

5　解答はすべて解答用紙に記入しなさい。ただし，「総得点欄」「採点欄」「得点欄」に記入してはいけません。また，裏面を使用してはいけません。

6　問題用紙の余白は下書きとして利用してかまいません。

7　試験終了後，配付された問題用紙，下書用紙は持ち帰りなさい。

長岡技術科学大学

問題用紙

（　数学・応用数学　）

問題1　a を正の実数とし，xy 平面上の領域 D_a を $D_a = \{(x, y) | 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\}$ とする。下の問いに答えなさい。

(1)　関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい。

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ の値を求めなさい。

(3)　等式 $\displaystyle\iint_{D_a} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^a xe^{-x^2}dx\right)^2$ が成り立つことを示しなさい。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$ の値を求めなさい。

問題2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とし，E を2次の単位行列とする。A の固有値を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とし，

行列 $P,\ Q$ を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta E),\ Q = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha E)$$

とする。下の問いに答えなさい。

(1)　α, β を求めなさい。

(2)　P, Q, PQ, QP, P^2, Q^2 をそれぞれ求めなさい。

(3)　任意の自然数 n に対して $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$ が成り立つことを，n に関する数学的帰納法を用いて示しなさい。

問題3　下の問いに答えなさい。

(1)　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x$ を解きなさい。

(2)　$u = \dfrac{1}{y}$ のとき，$\dfrac{du}{dx}$ を y および $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表しなさい。

(3)　微分方程式 $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{y} = -e^x$ を，変数変換 $u = \dfrac{1}{y}$ で u についての微分方程式に変換することにより解きなさい。

問題4　A, B の2人を含む8人が下図のようなトーナメント方式で優勝を争う。トーナメントの組み合わせは無作為に決めるものとし，それぞれの試合でどちらが勝つ確率も $\dfrac{1}{2}$ であるとする。下の問いに答えなさい。

(1)　A が優勝する確率を求めなさい。

(2)　A と B が1回戦で対決する確率を求めなさい。

(3)　A と B が決勝戦で対決する確率を求めなさい。

(4)　A と B がどこかで対決する確率を求めなさい。