

令和4年度 第3学年入学者選抜学力試験問題

専 門 科 目

数学・応用数学

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
- 2 問題用紙は2ページで、解答用紙は4ページあります。試験開始の合図があったから確かめなさい。
- 3 監督者の指示に従い、解答用紙の各ページに受験番号を記入しなさい。氏名を書いてはいけません。
- 4 文字などの印刷に不鮮明なところがあった場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 5 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。ただし、「総得点欄」「採点欄」「得点欄」に記入してはいけません。また、裏面を使用してはいけません。
- 6 問題用紙の余白は下書きとして利用してかまいません。
- 7 試験終了後、配付された問題用紙、下書用紙は持ち帰りなさい。

長岡技術科学大学

問題用紙
(数学・応用数学)

問題1 平面上の直線 $y = 2x$ を l とする。任意の点 P に対して、 P を通る傾き 1 の直線と l との交点を P' とする。下の問いに答えなさい。

- (1) $P(3, 2)$ に対する P' の座標を求めなさい。
- (2) $P(X, Y)$ に対する P' の座標を X と Y を用いて表しなさい。
- (3) P を P' に移す一次変換を表す行列 A を求めなさい。
- (4) 前問(3)の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

問題2 下の問いに答えなさい。

- (1) 極限 $L = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ を求めなさい。
- (2) 広義積分 $I_1 = \int_0^1 \log x \, dx$ を求めなさい。
- (3) 広義積分 $I_2 = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x}{1-xy} \, dy \right\} dx$ を求めなさい。

問題3 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。また、実数 t の実数値関数を成分とする

2次元ベクトル値関数 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ が、微分方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = A \vec{x} \cdots (*)$$

を満たしているとする。ただし、ベクトル値関数の微分は、成分ごとの微分である。下の問いに答えなさい。

- (1) A^2 を求めなさい。
- (2) $(E - tA)^{-1} = E + tA$ であることを示しなさい。
- (3) $\frac{d}{dt} (tA \vec{x}) = A \vec{x}$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) $\frac{d}{dt} ((E - tA) \vec{x}) = \vec{0}$ が成り立つことを示しなさい。
- (5) $(*)$ の解で、 $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めなさい。

問題4 n を自然数、 p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。また、点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする。 X に対し、次の規則に従って操作を行う。

規則

- X が A にあるときは、確率 p で X を A にとどめ、確率 $1 - p$ で X を B に移動させる。
- X が B にあるときは、必ず X を A に移動させる。

最初 X が A にあるとする。 n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す。例えば $a_1 = p$ である。下の問いに答えなさい。

- (1) a_2 を求めなさい。
- (2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めなさい。